Exercices : Dérivée d'une fonction

Exercice 1 : Calculez les dérivées des fonctions suivantes, définies sur P :

a – $f(x) = 2x^2 - 7x + 9$

b – $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$

c – $f(x) = 3 - 4x$

d – $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 3$

Exercice 2 : Déterminez l'équation de la tangente à la courbe (C)représentant la fonction f au point A d'abscisse x_A dans les cas suivants :

a – $f(x) = x^2 + 3x - 12$ $\quad x_A = 5$

b – $f(x) = x^3 - 3x + 6$ $\quad x_A = 1$

Exercice 3 : Dressez le tableau des variations de la fonction suivante :

$f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ $\quad$ sur I = [- 1; 4]

Exercice 4 : Le coût total de production d'un article varie en fonctions du nombre d'objets x fabriqués suivant la formule : $C(x) = x^2 - 24x + 225$.

1° - Calculez : $C(1)$; $C(10)$; $C(15)$; $C(20)$; $C(25)$.

2° - Etudiez et représentez graphiquement $C(x)$ pour $I = [1 ; 25]$. Quelle est la nature de la courbe obtenue ?

3° - Les articles sont vendus 16 € pièce. On désigne par $V(x)$ le montant correspondant à la vente de x articles. Exprimer $V(x)$ en fonction de x. Représenter graphiquement $V(x)$.

4° - Exprimez le résultat bénéficiaire $B(x)$ en fonction de x (On rappelle que le bénéfice B est obtenu en soustrayant le coût de fabrication C à la recette V).Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximum ? Calculez-le.

Exercice 5 : L'entreprise RAVEL fabrique des appareils à cire. Le nombre d'appareils fabriqués par jour est n. Le coût de fabrication, en euros, de ces n appareils est donné par la relation :

$$C(n) = n^2 + 160n + 800 \qquad \text{avec } 5 \leq n \leq 60$$

1° - Quel est le coût de fabrication de 50 appareils ?

2° - Le bénéfice B réalisé pour la vente de n appareils est donné par $B(n) = -n^2 + 90n - 800$

a – Sachant que le bénéfice B est obtenu en soustrayant le coût de fabrication C à la recette R, retrouver la recette obtenue pour la vente d'un appareil à cire.

b – Pour connaître le bénéfice maximum :

- Calculer $B'(x)$ où B' est la dérivée de la fonction B définie par :
  $B(x) = -x^2 + 90x - 800$ sur I = [5 ; 60]
- Calculer la valeur n_m qui annule $B'(x)$.
- Dressez le tableau de variations de la fonction $B(x)$.
- Tracer la courbe représentant le bénéfice B dans l'intervalle [5 ; 60].
- Calculer la valeur de B correspondante et placer dans le repère le point de coordonnées (n_m ; B (n_m)).
- Préciser le nombre d'appareils à fabriquer pour obtenir le bénéfice maximum. Quel est ce bénéfice maximum ?

Dérivées des fonctions usuelles

fonction :	$f(x) = k$ (constante)	$f(x) = ax + b$	$f(x) = x^n$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
fonction dérivée :	$f'(x) = 0$	$f'(x) = a$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = -\sin x$	$f'(x) = \cos x$

Opérations sur les fonctions dérivées (u et v sont deux fonctions)

	❶	❷	❸	❹	❺	❻
fonction :	$u + v$	$k.u$ k réel fixé	$u.v$	u^2	$\frac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$ sur I	$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ sur I
fonction dérivée :	$u' + v'$	$k.u'$	$u'.v + u.v'$	$2u'.u$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Rappel : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est donnée par :

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exercice

Dans chaque cas, on considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et un point x_0.

Déterminer :

a) la valeur de f en x_0 ; $f(x_0)$
b) la fonction dérivée de f : $f'(x)$
c) le nombre dérivé de f en x_0 : $f'(x_0)$
d) l'équation de la tangente $T(x)$

1. $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, avec $I = \mathbb{R}$ et $x_0 = 3$

2. $f(x) = \frac{4}{x-2}$, avec $I =]-\infty\,;2[$ et $x_0 = 0$

3. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 7x + 10$, avec $I = \mathbb{R}$ et $x_0 = 2$

4. $f(x) = \frac{2}{x-3}$, avec $I =]3\,;+\infty[$ et $x_0 = 4$

5. $f(x) = (2x + 1)^2$, avec $I = \mathbb{R}$ et $x_0 = 3$

6. $f(x) = \frac{5x-2}{3x-4}$, avec $I =]\frac{4}{3}\,;+\infty[$ et $x_0 = 2$

7. $f(x) = \sqrt{x + 4}$, avec $I =]-4\,;+\infty[$ et $x_0 = 0$

8. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$, avec $I = \mathbb{R}$ et $x_0 = 0$

9. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, avec $I = \mathbb{R}$ et $x_0 = 1$

10. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, avec $I =]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ et $x_0 = 5$