SOMMAIRE

Activité mentale (flash)

Automatismes et calculs

Compétence Calculer

22 Simplifier les fractions suivantes.

1. $5+\frac{3}{2}$ **2.** $\frac{4}{3}-\frac{5}{6}$ **3.** $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$

23 Simplifier les calculs suivants.

1. $3\times\frac{7}{15}$ **2.** $3+7\times4$ **3.** $\frac{9}{5}\div\frac{3}{4}$

24 Simplifier les calculs suivants.

1. $10^3\times10^{-5}$ **2.** $\frac{10^4}{10^{-3}}$ **3.** $\frac{10^{-2}\times10^5}{10^4}$

25 Résoudre les équations suivantes.

1. $2x+5=4$ **2.** $-3x+4=10$

26 Résoudre les équations suivantes.

1. $-2x+3=4x$ **2.** $3x-10=2x$

27 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $3x+5>-4x+19$ **2.** $-4x+2\leqslant x+12$

28 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $2x+7<-2x+11$ **2.** $5x+1\geqslant 7x+9$

29 Donner la liste des carrés de tous les entiers compris entre -10 et 10.

30 Effectuer les calculs suivants.

1. $(-8)^2$ **2.** $0{,}9^2$ **3.** -6^2

4. $\left(\frac{7}{5}\right)^2$ **5.** $\left(-\sqrt{11}\right)^2$ **6.** $\left(2\sqrt{5}\right)^2$

7. $(10^4)^2$ **8.** $(10^{-5})^2$ **9.** $(-10^{-3})^2$

31 Donner les inverses des nombres suivants.

$$2\,;-1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{7}{4}\,;-\frac{10}{3}\,;10^3\,;10^{-4}$$

32 Donner la liste des cubes de tous les entiers compris entre -7 et 7.

33 Simplifier les racines carrées suivantes.

1. $\sqrt{1}\,;\sqrt{4}\,;\sqrt{9}\,;\sqrt{16}\,;\sqrt{25}\,;\sqrt{36}$

2. $\sqrt{100}\,;\sqrt{225}\,;\sqrt{400}\,;\sqrt{900}$

34 Simplifier les racines carrées suivantes.

$$\sqrt{0{,}01}\,;\sqrt{0{,}25}\,;\sqrt{0{,}04}\,;\sqrt{0{,}09}$$

35 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-2x+3$$

1. Calculer les images suivantes.

$$f(1)\,;f(3)\,;f(7)$$
$$f(-1)\,;f(-2)\,;f(-10)$$

2. Déterminer les antécédents par f des nombres suivants : 1 ; 3 ; 7 et -1.

3. Résoudre l'équation $f(x)=10$.

36 Reprendre l'exercice **35** avec $f(x)=2x+5$.

37 On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3}{x-2}$$

1. Justifier pourquoi f ne peut être définie en 2.

2. Calculer $f(3)$, $f(4)$, $f(8)$ et $f(12)$.

3. Résoudre l'équation $f(x)=\frac{3}{4}$.

38 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(2x-3)^3$$

Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(-4)$.

39 Simplifier les expressions suivantes.

1. $x\times x^2$ **2.** $x-3x$ **3.** $x-\frac{x}{2}$

40 Développer et réduire les expressions suivantes.

$A=3(2x+1)-4x$

$B=3x\times2x+5x-4x^2-8x+2$

$C=-2(x-3)+4x(x+1)$

41 Factoriser les expressions suivantes.

$A=(2x+1)(3x-4)+(2x+1)(-x+7)$

$B=(3x-2)(x+4)-(3x-2)(2x+5)$

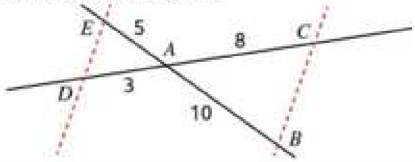
$C=(x+3)(2x-1)+2(x+3)(x+1)$

42 **Calcul mental**

1. Quelle est l'aire du rectangle de côtés 7 et 5 ?

2. Le triangle de côtés 5, 7 et 10 est-il rectangle ?

3. Sur la configuration ci-dessous, les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?



43 **1.** Donner la formule de la longueur p d'un cercle de rayon R.

Calculer la valeur exacte de p pour $R=3$ m puis pour $R=0{,}5$ cm.

2. a. Donner la formule de l'aire $\mathscr{A}$ d'un disque de rayon R.

b. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ pour $R=3$ m.

44 Déterminer la moyenne et la médiane des séries statistiques suivantes.

1. 2 ; 3 ; 3 ; 8

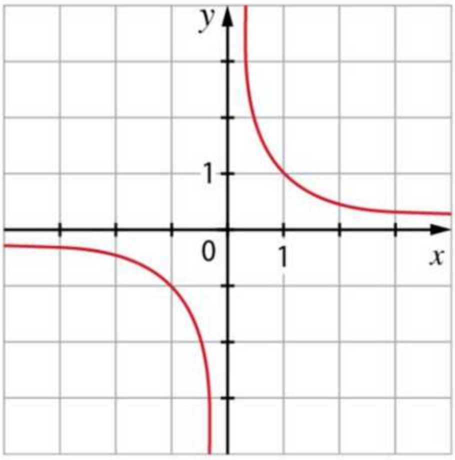
2. 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7

3. 8 ; 9 ; 11 ; 13 ; 14

4. -2 ; 0 ; 2 ; 6

Exercices

74 La courbe représentative de la fonction inverse est tracée ci-contre.



1. Résoudre graphiquement les équations :

a. $\frac{1}{x} = -1$; **b.** $\frac{1}{x} = 2$.

2. Résoudre graphiquement les inéquations :

a. $\frac{1}{x} < -1$; **b.** $\frac{1}{x} < 2$.

75 **1.** Résoudre algébriquement dans $[0\,;+\infty[$:

a. l'équation $\sqrt{x} = 5$; **b.** l'inéquation $\sqrt{x} < 3$.

2. Résoudre algébriquement dans $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$:

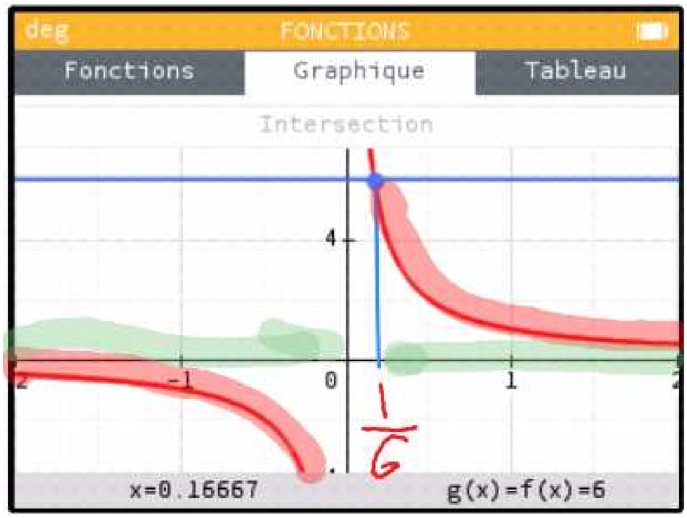
a. l'équation $\dfrac{1}{x} = -7$; **b.** l'inéquation $\dfrac{1}{x} < 6$.

75) $\boxed{1\text{-}a}$ $\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$

$\boxed{1\text{-}b}$ $\sqrt{x} < 3 \Rightarrow x < 9$

$\boxed{2\text{-}a}$ $\dfrac{1}{x} = -7 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{7}$

$\boxed{2\text{-}b}$ $\dfrac{1}{x} < 6$



$x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]\dfrac{1}{6}\,;+\infty\right[$

88 Cassandre Beaugrand, championne du monde de triathlon en 2018, s'entraîne à parcourir une distance d'un kilomètre.

a) Exprimer la vitesse moyenne v de la cycliste en fonction du temps de parcours t, en min.
Quelle est l'unité de cette grandeur ?

b) Calculer la vitesse moyenne pour un temps de parcours de 2 min.

c) Quel doit être le temps de parcours de Cassandre Beaugrand pour que sa vitesse moyenne soit égale à 60 km·h^{-1} ?

88| a) $v = \frac{d}{t}$ d distance = 1 km

$[t]$ = min (dimension de t est en min).

$\Rightarrow v = \frac{1}{t}$ $[v]$ = km/min

b). $v = \frac{1}{2} = 0{,}5$ km/min

c) il faut résoudre l'équation suivante

$60 \text{ km/h} = \frac{1}{t}$ → min

60 km par heure

60 km par 60 min $\Rightarrow v = \frac{60}{60}$ km/min

$= 1$ km/min

$\frac{1 \text{ km}}{\text{min}} = v = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 1$ minute

est le temps de parcours pour avoir une vitesse de 60 km/h

89 Un rectangle a une aire égale à 60 m^2. On note x la largeur et y la longueur, en m, de ce rectangle.

1. Exprimer la longueur y en fonction de x.

2. Déterminer la largeur x lorsque $y = 24$.

3. On souhaite que la longueur de ce rectangle soit telle que $y \geqslant 10$.

a) Montrer que sa largeur doit être telle que $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{6}$.

b) Déterminer graphiquement les valeurs possibles de x.

89

1) Aire du rectangle = longueur × largeur

$= y \times x$

donc on a $60 = y \times x$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{60}{x}}$

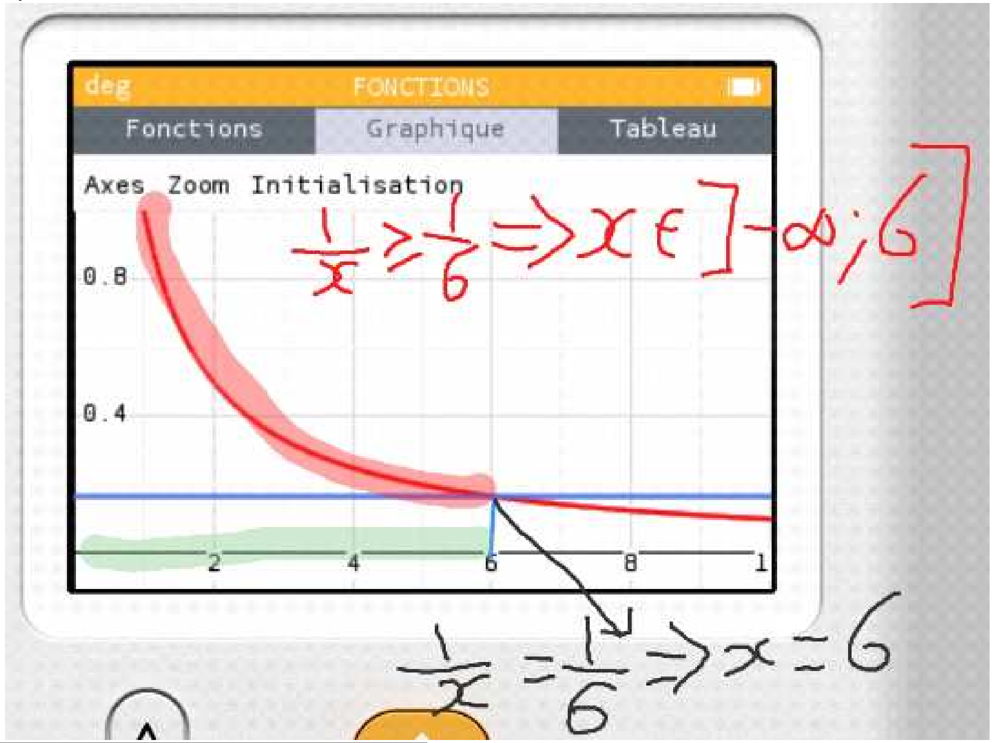
2) $60 = x \times 24 \Rightarrow x = \frac{60}{24} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ m

3) $y \geqslant 10$

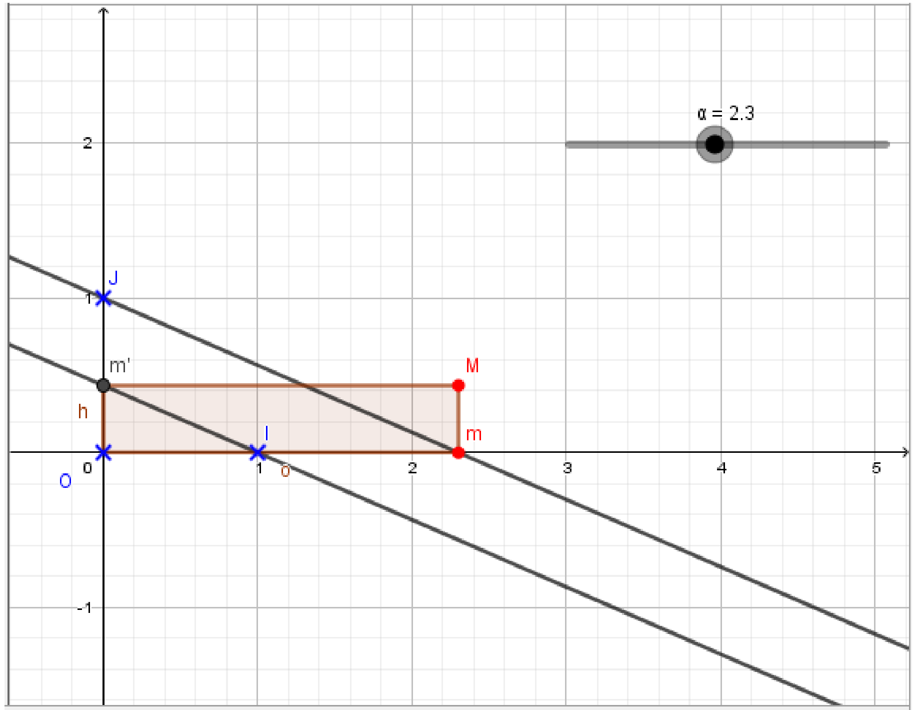
a) $y \geqslant 10 \Rightarrow \frac{60}{x} \geqslant 10$

$\frac{1}{x} \geqslant \frac{10}{60} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{6}}$

3)-b



90 $(O\,;I,J)$ est un repère orthonormé.
α désigne un nombre réel différent de 0.
À tout point m de coordonnées $(\alpha\,;0)$ on associe :
– le point d'intersection m' de l'axe des ordonnées et de la parallèle à la droite (Jm) passant par I ;
– le point M tel que $OmMm'$ est un rectangle.
Déterminer l'ensemble E décrit par le point M lorsque m décrit l'axe des abscisses privé de O.



90| la droite $d_1 : (mJ)$ passe par les point $m(\alpha, 0)$ et $J(0;1)$.

2 méthodes pour determiner l'équation de cette droite :

methode 1 : Un point $N(x,y) \in d_1$

$$\vec{mJ} = \begin{pmatrix} 0-\alpha \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{mN} = \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{mN} ; \vec{mJ}) = 0 \iff \det\left[\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$x - \alpha - (-\alpha)y = 0$$

$$x - \alpha + \alpha y = 0$$

l'équation cartézienne de la droite. $\boxed{x + \alpha y - \alpha = 0}$

methode n°2 : $y = ax + b$

a coef directeur

$$a = \frac{y_m - y_J}{x_m - x_J} = \frac{0-1}{\alpha - 0} = -\frac{1}{\alpha}$$

b est l'ordonné à l'origine car que $x = 0$ $y = 1$ les coordonnée du point $J(0;1)$

Sinon $y = -\frac{1}{\alpha}x + b$ si on prend le point $J(0;1)$

On a $1 = -\frac{1}{\alpha} \times 0 + b \Rightarrow b = 1$

avec le point $m(\alpha ; 0)$

$0 = -\frac{1}{\alpha} \times \alpha + b \Rightarrow 0 = -1 + b \Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{\alpha} x + 1}$ l'équation de la droite d_1

la droite d_2 $(m'I)$ // d_1 et passant par le point $I(1;0)$.

a pour équation

$y = -\frac{1}{\alpha} x + b'$ les deux coefs directeurs de d_1 et d_2 sont égaux (droites parallèles)

b' se calcule à partir du point I

d_2 passe par I donc.

$0 = -\frac{1}{\alpha} \times 1 + b' \Rightarrow b' - \frac{1}{\alpha} = 0 \Rightarrow b' = \frac{1}{\alpha}$

$\boxed{d_2} : y = -\frac{1}{\alpha} x + \frac{1}{\alpha}$.

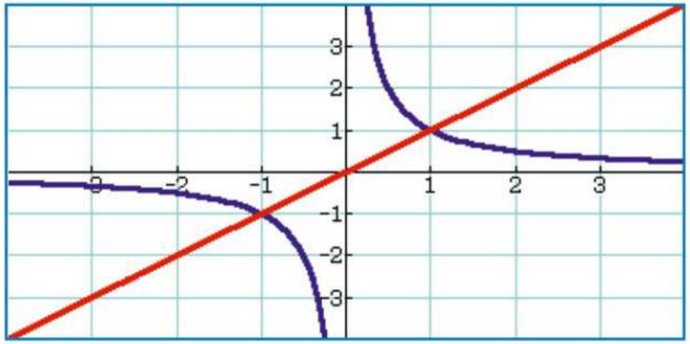
calcul des coordonnées du point m' : m' est l'intersection de d_2 avec l'axe des ordonnées. donc $x = 0$.

$y_{m'} = -\frac{1}{\alpha} \times 0 + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \boxed{y_{m'} = \frac{1}{\alpha}}$

On en déduit que $M(\alpha ; \frac{1}{\alpha})$

donc M décrit la partie positive de l'hyperbole caractéristique de la fonction inverse.

91 Pour étudier la position relative de la courbe de la fonction inverse et de celle de la fonction $x \mapsto x$, Eva a représenté ces deux courbes à l'écran de sa calculatrice.



1. a) Lire graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

b) Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = x$ en utilisant l'égalité des produits en croix.

2. Lire graphiquement la position relative des deux courbes.

92 La distance entre le domicile de Lucas et son lieu de travail est de 60 km.

Selon les jours, il met entre 1 h 15 min et 1 h 30 min pour effectuer le trajet.

On note t (en h) la durée du trajet et v (en $km \cdot h^{-1}$) la vitesse moyenne de Lucas sur ce parcours.

a) Exprimer v en fonction de t.

b) Exprimer 1 h 15 min et 1 h 30 min par un nombre décimal d'heure.

c) Donner un encadrement de v en s'aidant de l'hyperbole de la fonction inverse.

a) $d = 60$ km ; t en heure

$v = \frac{d}{t} = \frac{60}{t}$ km/h

b) 1 h 15 min = 1,25

car 15 min = $\frac{15}{60}$ h = $\frac{1}{4}$ h

1 h 30 min = 1,5

1 h 20 min $\simeq$ 1,333

c) $v_1 = \frac{60}{1,25} = 48$ km/h

$v_2 = \frac{60}{1,5} = 40$ km/h

$v_3 = \frac{60}{1,333} = 45$ km/h

93 **Algo** **1.** Appliquer ce programme au nombre 2.

- Choisir un nombre non nul.
- L'élever au carré.
- Prendre l'inverse.

2. Ambre : « Je cherche un nombre x tel que, après avoir appliqué ce programme, je retrouve x. »

a) Montrer que si un tel nombre existe, alors il est solution de l'équation $x^3 = 1$.

b) Quel nombre Ambre doit-elle choisir ?

1) 2

$2^2 = 4$

$\frac{1}{4} = 0,25$

2) x

x^2

$\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = x$

a) $\Rightarrow x^3 = 1$

b) $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

94 Un pendule est constitué d'une masse suspendue au bout d'un fil. Lorsque ce pendule oscille, sa période est le temps qui s'écoule entre deux passages dans le même sens, à la verticale. On montre que la période p, en s, est donnée en fonction de la longueur ℓ du fil, en m, par la formule :

$$p(\ell) = 2\sqrt{\ell}$$

1. Le célèbre pendule de Foucault avait une longueur de 67 m. Quelle était sa période ?
Arrondir au dixième.

2. On se propose de déterminer la longueur d'un pendule dont la période est 3 s.

a) Justifier que le problème revient à résoudre l'équation $\sqrt{\ell} = 1{,}5$.

b) Résoudre graphiquement cette équation et conclure.

① $\ell = 67$ m

$P = 2\sqrt{67} \simeq 16{,}37$

$P \simeq 16{,}4$ s

② a) $P = 3$ s $\Rightarrow$

$3 = 2\sqrt{\ell}$

$\Rightarrow \sqrt{\ell} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

b) $\sqrt{\ell} = 1{,}5 \Rightarrow$

$\sqrt{\ell} \times \sqrt{\ell} = 1{,}5 \times 1{,}5$

$\boxed{\ell = 2{,}25 \text{ m}}$

94 Un pendule est constitué d'une masse suspendue au bout d'un fil. Lorsque ce pendule oscille, sa période est le temps qui s'écoule entre deux passages dans le même sens, à la verticale. On montre que la période p, en s, est donnée en fonction de la longueur ℓ du fil, en m, par la formule :

$$p(\ell) = 2\sqrt{\ell}$$

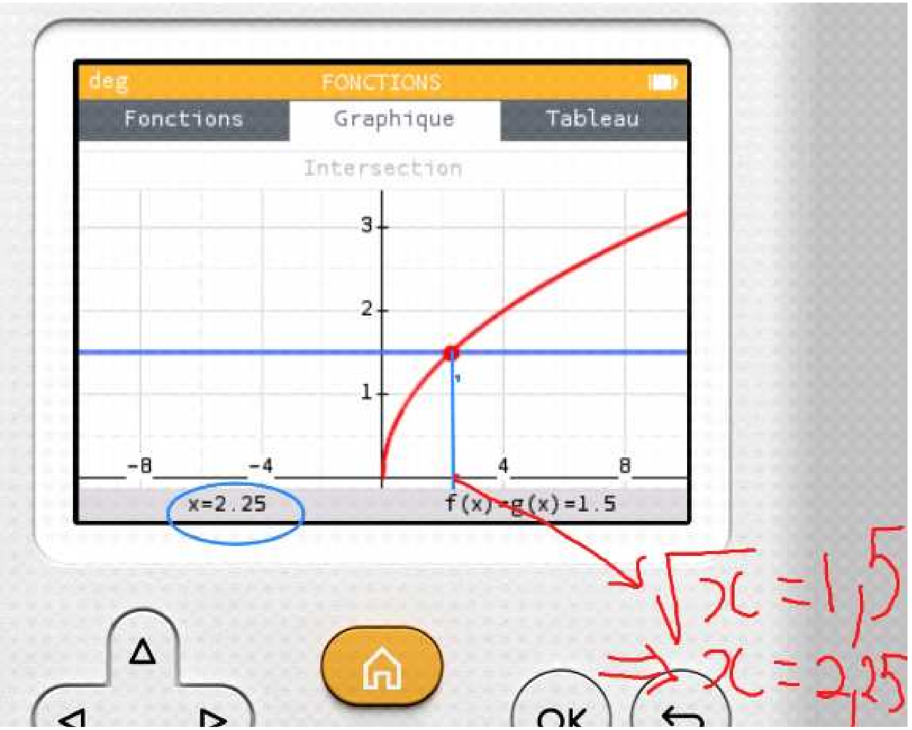
1. Le célèbre pendule de Foucault avait une longueur de 67 m. Quelle était sa période ?
Arrondir au dixième.

2. On se propose de déterminer la longueur d'un pendule dont la période est 3 s.

a) Justifier que le problème revient à résoudre l'équation $\sqrt{\ell} = 1{,}5$.

b) Résoudre graphiquement cette équation et conclure.

Suite



Un peu d'histoire

En 1851, le physicien français Léon Foucault utilisa le pendule qui porte maintenant son nom pour démontrer le mouvement de rotation de la Terre. Le pendule était pour cela accroché à la voûte du Panthéon de Paris.

95 La fréquence f du son émis par la corde d'une guitare, en hertz (Hz), est donnée en fonction de la tension t de la corde, en newton, par la formule $f(t) = 10\sqrt{t}$.

1. Calculer la fréquence pour $t = 100$, puis pour $t = 400$.

2. On souhaite déterminer la tension qui permet d'obtenir la note La$_2$, de fréquence 220 Hz.

a) Justifier que le problème revient à résoudre l'équation $\sqrt{t} = 22$.

b) Résoudre graphiquement cette équation et conclure.

3. De même, déterminer avec quelles tensions on obtient un son dont la fréquence est supérieure à celle du Sol$_2$, qui est de 198 Hz.

1)

$$f(100) = 10\sqrt{100} = 10 \times 10 = 100\text{ Hz}$$

$$f(400) = 10\sqrt{400}$$

$$\sqrt{400} = \sqrt{4 \times 100} = \sqrt{4} \times \sqrt{100} = 2 \times 10 = 20$$

$$f(400) = 10 \times 20 = 200\text{ Hz}$$

lycée régional Saint-Exupéry

95 La fréquence f du son émis par la corde d'une guitare, en hertz (Hz), est donnée en fonction de la tension t de la corde, en newton, par la formule $f(t) = 10\sqrt{t}$.

1. Calculer la fréquence pour $t = 100$, puis pour $t = 400$.

2. On souhaite déterminer la tension qui permet d'obtenir la note La_2, de fréquence 220 Hz.

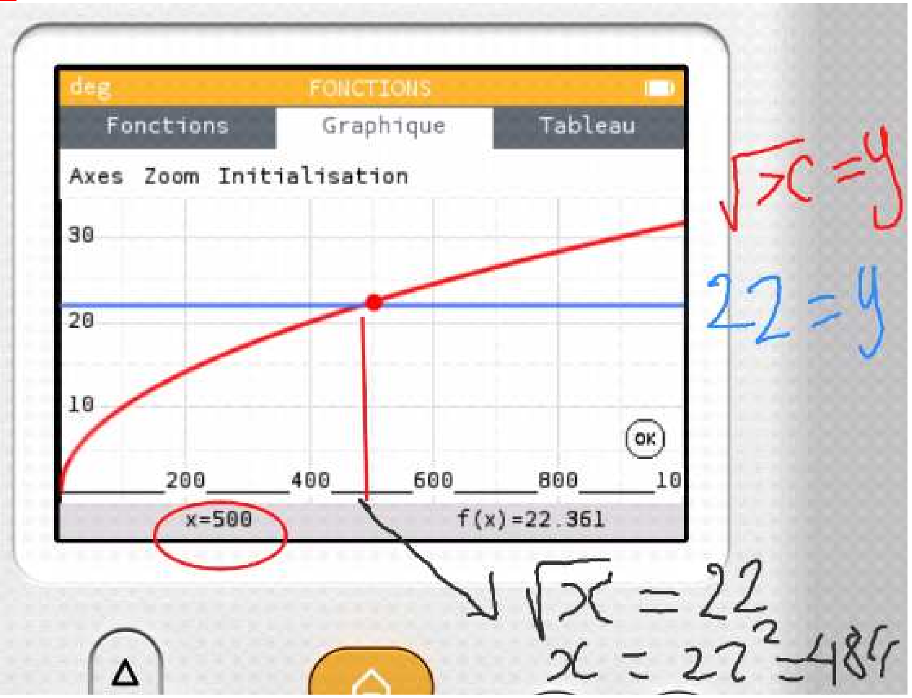
a) Justifier que le problème revient à résoudre l'équation $\sqrt{t} = 22$.

b) Résoudre graphiquement cette équation et conclure.

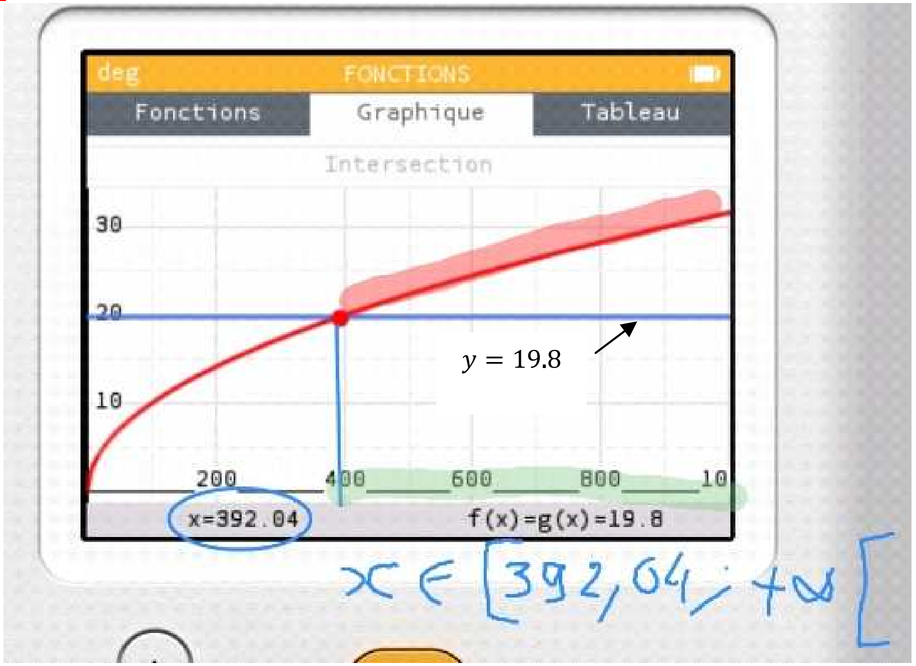
3. De même, déterminer avec quelles tensions on obtient un son dont la fréquence est supérieure à celle du Sol_2, qui est de 198 Hz.

Suite

2) $10\sqrt{t} = 220 \Rightarrow \sqrt{t} = 22$



3) $10\sqrt{t} \geq 198 \Rightarrow \sqrt{t} \geq 19.8$



96 On se place sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

f est la fonction cube et $\mathscr{C}$ est sa représentation graphique dans un repère.

g est la fonction racine carrée et $\mathscr{C}'$ est sa représentation graphique dans le même repère.

On se propose d'étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

a) Avec la calculatrice, conjecturer les positions relatives de ces courbes.

b) À l'aide de cet écran de calcul formel, expliquer pourquoi :

- $x^3 - \sqrt{x} \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$;
- $x^3 - \sqrt{x} \leqslant 0$ si $0 < x \leqslant 1$.

1 $\quad h(x) = x\,(x-1)\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3+\sqrt{x}}$

$\rightarrow$ $\mathbf{h(x) = x^3 - \sqrt{x}}$

> 0 ssi $x \in\ ]0;\ +\infty[$

c) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

$$x^3 - \sqrt{x} = x(x-1)\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3+\sqrt{x}}$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1 > 0$$

$x > 0$ $\quad x^2 > 0$; $x^3 > 0$

x^4

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$-$	0	$+$	
		$x^3 < \sqrt{x}$		$x^3 > \sqrt{x}$	