Chapitre 9 : Suites particulières

SOMMAIRE

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
20 La suite (a_n) est arithmétique, définie sur $\mathbb{N}$, de raison 4 et de premier terme $a_0 = -2{,}2$.	Le terme général est : $a_n = -2{,}2n + 4$.	Le terme général est : $a_n = -2{,}2^n + 4$.	Pour tout nombre entier naturel n : $a_n = -2{,}2 + 4n$.	Pour tout nombre entier naturel n : $a_n = -2{,}2 \times 4^n$.
21 La suite (b_n) est définie par $b_1 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n - 11$. La suite (b_n) est :	arithmétique de raison 5.	arithmétique de raison −11.	croissante.	décroissante.
22 La suite (c_n) est géométrique, définie sur $\mathbb{N}$, de raison −3 et de premier terme $c_0 = 0{,}5$.	Pour tout nombre entier naturel n : $c_n = -3 \times 0{,}5^n$.	Pour tout nombre entier naturel n : $c_n = -0{,}5 \times 3^n$.	Le terme général est : $c_n = 0{,}5 \times 3^n$.	Le terme général est : $c_n = 0{,}5 \times (-3)^n$.
23 La suite (d_n) est définie par $d_0 = -7$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = 1{,}5d_n$. La suite (d_n) est :	géométrique de raison −7.	géométrique de raison 1,5.	croissante.	décroissante.
24 La suite (e_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = -7 + 3n$. La suite (e_n) est :	arithmétique de premier terme −7.	arithmétique de premier terme 3.	géométrique de premier terme −7.	géométrique de premier terme 3.
25 Le terme général de la suite (u_n) est $u_n = -7 + 3n$. La suite (u_n) est :	arithmétique de raison −7.	arithmétique de raison 3.	géométrique de raison −7.	géométrique de raison 3.
26 La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2 \times 5^n$. La suite (v_n) est :	arithmétique de premier terme 2.	arithmétique de premier terme 5.	géométrique de premier terme 2.	géométrique de premier terme 5.
27 Le terme général de la suite (w_n) est $w_n = 2 \times 5^n$. La suite (w_n) est :	arithmétique de raison 2.	arithmétique de raison 5.	géométrique de raison 2.	géométrique de raison 5.
28 La suite (t_n) est définie par $t_0 = -3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 5t_n - 0{,}8$. La suite (t_n) :	est arithmétique.	est géométrique.	est arithmétique et géométrique.	n'est ni arithmétique ni géométrique.
29 $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 12$	$S = 66$	$S = 132$	$S = 78$	$S = 156$
30 La suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est arithmétique de raison −6 et de premier terme $u_0 = 1{,}4$. $S_n = u_0 + \ldots + u_n$.	$S_8 = 22{,}6$	$S_8 = 203{,}4$	$S_8 = -22{,}6$	$S_8 = -203{,}4$
31 $T = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10}$	$T = 1\,023$	$T = -1\,023$	$T = 2\,048$	$T = 2\,047$
32 $Z = 1 - 2 + 2^2 + \ldots + (-2)^{10}$	$Z = 683$	$Z = -683$	$Z = -2\,047$	$Z = 2\,047$
33 La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$, est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 13$. $T_n = v_0 + \ldots + v_n$.	$T_4 \approx 43{,}7$	$T_4 = 43{,}7$	$T_4 = 65(1 - 0{,}8^5)$	$T_4 = 38{,}376$

Activités 1

Suite arithmétique

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n $u_n = \frac{n}{2}$

a) Calculer u_1, u_2, u_3
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de n
c) La suite (v_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + r$. Le réel r est nommé la raison de la suite.

   Démontrer que (u_n) est arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.
d) Calculer la somme S des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n)

Activités 2

Suite géométrique

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n $u_n = 3 \times 2^n$

a) Calculer u_1, u_2, u_3
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de n
c) La suite (v_n) est géométrique s'il existe un nombre réel non nul q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q \times v_n$. Le réel q est nommé la raison de la suite.

   Démontrer que (u_n) est géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.
d) Calculer la somme S des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n)

1. Reconnaitre et étudier une suite arithmétique

Définition :

Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est dite arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.Le nombre réel r s'appelle la raison de la suite (u_n).

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 1,5$ est une suite arithmétique de raison $r = -1,5$.
On a donc $u_1 = 4 - 1,5 = 2,5$; $u_2 = 2,5 - 1,5 = 1$ et $u_3 = 1 - 1,5 = u_3 = -0,5$.

$$u_0 = 4 \xrightarrow{-1,5} u_1 = 2,5 \xrightarrow{-1,5} u_2 = 1 \xrightarrow{-1,5} u_3 = -0,5 \xrightarrow{-1,5} u_4 = -2$$

Propriété : démonstration : ex 114 page 67

Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est arithmétique de raison r si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = u_0 + r \times n$.

Exemples

- Dans l'exemple précédent, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$□□, $u_{n+1} = u_n - 1,5$. La raison est $r = -1,5$. Le terme général de la suite s'écrit donc $u_n = 4 - 1,5 \times n$.

- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2,4 + 5 \times n$ est arithmétique de raison $r = 5$ et $v_0 = -2,4$. La suite (v_n) a pour relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 5$.

Propriété : démonstration : ex 114 page 67

Si une suite (u_n) est arithmétique de raison r alors, pour tous nombres entiers naturels n et p,
$u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Exemple

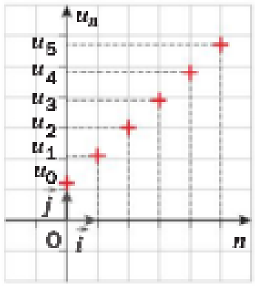
La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 4$ et $u_5 = -11$.On a $u_{20} = u_5 + (20 - 5) \times r = u_5 + 15 \times r$
$u_{20} = -11 + 15 \times 4 = 49$.

Propriétés (démonstration : ex 115 page 67)

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Exemple

Un poêle consomme $1,2$ kg de granulés de bois la première heure de chauffe, puis en consomme $0,9$ kg chaque heure suivante.
On note u_n le nombre de kilogrammes de granulés de bois utilisés au bout de n heures de chauffe.
La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 0,9$ et de premier terme $u_0 = 1,2$.
Comme $r = 0,9 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1,2 + 0,9 \times n = f(n)$ avec $f(x) = 0,9x + 1,2$.



Les points du nuage sont alignés et appartiennent à la droite d'équation $y = 0,9\,x + 1,2$.

On reconnaît l'expression d'une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{N}$ ($0,9 > 0$).

2. Reconnaitre et étudier une suite géométrique

Définition :

Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.Le nombre réel q s'appelle la raison de la suite (u_n).

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 1,5\,u_n$ est une suite géométrique de raison $1,5$.
On a donc $u_1 = 1,5 \times 2 = 3$, $u_2 = 1,5 \times 3 = 4,5$ et $u_3 = 1,5 \times 4,5 = 6,75$.

Propriété : démonstration : ex 116 page 67

Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est géométrique de raison q si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$

Exemples

- Un milieu de culture contient $1\,500$ levures par microlitre. Ces levures se divisent et croissent de $1\,\%$ par heure. La mesure du nombre de levures par microlitre au bout de n heures est notée u_n. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,01$ et de premier terme $u_0 = 1\,500$, et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1\,500 \times 1,01^n$.
- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2,4 \times 5^n$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = -2,4 \times 5^0 = -2,4$.

Propriété : démonstration : ex 116 page 67

Si une suite (u_n) est géométrique de raison q alors, pour tous nombres entiers naturels n et p, avec $n > p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et $u_4 = 0,1$.On a $u_9 = u_4 \times q^5 = 0,1 \times 2^5 = 3,2$.

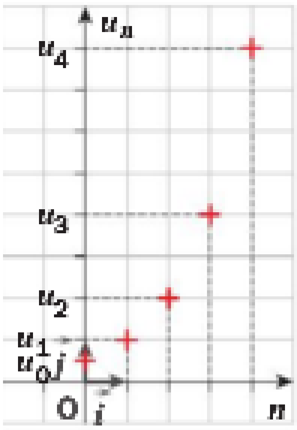
Propriétés (démonstration : ex 117 page 67)

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.

	$u_n < 0$	$u_n > 0$
$q < 0$	(u_n) n'est pas monotone.	(u_n) n'est pas monotone.
$0 < q < 1$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.
$q = 1$	(u_n) est constante égale u_0.	(u_n) est constante égale u_0.
$q > 1$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.

Exemple

- On a représenté ci-contre la suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0,5$. $q = 2 > 1$ et $u_0 = 0,5 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
- La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = 8$.
  $q = 0,5 \in]0\,;\,1[$ et $v_0 = 8 > 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
- La suite (w_n) est géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $w_0 = 1$.
  $q = -3 < 0$, donc la suite (w_n) n'est pas monotone.



La suite (w_n) prend alternativement des valeurs positives et négative

3. Calculer une somme de termes d'une suite particulière

n et p sont des nombres entiers naturels avec $p \leq n$; r et q sont des nombres réels.

Notation

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$$

Propriété : démonstration à compléter : ex 113 page 67

La somme des n premiers entiers naturels non nuls est égale à :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Exemple :

$$\sum_{k=1}^{k=20} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 20 = \frac{20\,(20+1)}{2} = 210$$

Propriétés : démonstration à compléter : ex 113 page 67

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- La somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

- La somme des termes d'indices p à n de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{(u_p + u_n)}{2}$$

Exemple :

Une suite (u_n) est arithmétique, $u_3 = 3$ et $u_9 = 15$.

$$\sum_{k=3}^{k=9} u_k = u_3 + u_4 + \cdots + u_9 = (9-3+1)\frac{(u_3 + u_9)}{2} = 7 \times \frac{3+15}{2} = 63$$

Propriété : démonstration rédigée page 66

Si $q \neq 0$ et $q \neq 1$, alors :

$$\sum_{k=0}^{k=n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple :

$$\sum_{k=0}^{k=10} 5^k = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{10} = \frac{1-5^{10+1}}{1-5} = \frac{1-5^{11}}{-4} = 12\,207\,031$$

Propriétés : démonstration rédigée page 66 & démonstration à compléter : ex 118 page 67

Une suite (u_n) est géométrique de raison q, $q \neq 1$, et de premier terme u_0.

- La somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- La somme des termes d'indices p à n de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Exemple :

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -2$ et $u_0 = 3$.

La somme des dix premiers termes de (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k=9} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = 3\frac{1-(-2)^{9+1}}{1-(-2)} = 1-(-2)^{10} = -1023$$

Exercices (suites numériques)

Exo n°1.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0=5 \text{ et } u_1=\dfrac{13}{6} \\ u_{n+2}=\dfrac{5}{6}u_{n+1}-\dfrac{1}{6}u_n \end{cases}$

Calculer les termes u_2, u_3, u_4 et u_5.

Exo n°2.

La suite géométrique (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=-\dfrac{1}{3}u_n \end{cases}$ (raison $-\dfrac{1}{3}$)

1. Calcul de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Calcul de u_n en fonction de n. On utilise la formule $u_n=u_0\times q^n$:
3. Calcul de u_{10}

Exo n°3.

Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0=1000$ et de raison $q=1{,}02$.
Déterminer la valeur arrondie approchée à 10^{-2} près de u_{10}.

Exo n°4.

Dans chacun des cas, on donne le 1er terme u_0 et la raison q

a) $u_0=-2$ et $q=-2$. Calculer u_5

b) $u_0=500$ et $q=1{,}0325$. Calculer u_{10} (arrondir à 10^{-2})

Exo n°5.

La suite géométrique (C_n) est définie par : $\begin{cases} C_0=1000 \\ C_{n+1}=1{,}0225\times C_n \end{cases}$

Dans ce qui suit, arrondir les valeurs approchées à 10^{-2}.

1. Calculer C_1, C_2 et C_3
2. Pour tout entier n de N, exprimer C_n en fonction de n.
3. Calculer C_{31} et C_{32}. En déduire le plus petit nombre entier n tel que $C_n \geq 2C_0$
4. *Question supplémentaire.* On donne l'algorithme suivant :

```
Début
      Lire c
      u prend la valeur c
      q prend la valeur 1,0225
      n prend la valeur 0
      Tant que u<2c
            n prend la valeur n+1
            u prend la valeur q×u
      Fin tant que
      Afficher n et u
Fin
```

a) Quel est le but de cet algorithme ?

b) Faire fonctionner cet algorithme avec différentes valeurs de c. Que constate-t-on ?

Exo n°6.

La suite (u_n) est une suite géométrique dont on donne un terme et la raison.

1. $u_5=32768$ et $q=0{,}8$. Calculer u_0.
2. $u_4=20736$ et $q=1{,}2$. Calculer u_0

Exo n°7.

La suite (u_n) est une suite géométrique dont on donne deux termes.

On donne $u_2=4$ et $u_4=\frac{16}{9}$. Calculer la raison q.

Exo n°8.

Démontrer que les nombres 50000, 48000 et 46080 peuvent être, dans cet ordre, les trois premiers termes u_0, u_1 et u_2 d'une suite géométrique (u_n) dont on précisera la raison.

Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-2}.

Exo n°9.

La suite géométrique (v_n) est définie par $\begin{cases} \text{Premier terme : } v_1=100\,000 \\ \text{Raison : } q=0{,}9 \end{cases}$

1. Écrire les 5 premiers termes de la suite (v_n)
2. Exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
3. Calculer v_7 et v_8. En déduire le plus petit entier n tel que $v_n \leq \frac{1}{2} v_1$
4. *Question supplémentaire.* On donne l'algorithme suivant :

```
Algorithme Seuil
 Lire le seuil demandé S
 N←1
 V←100000
 Tant que V>S
        N←N+1
        V←0,9V
 Fin tant que
 Afficher N et V.
Fin Algorithme
```

a) Quel est le but de cet algorithme ?
b) Traduire cet algorithme pour une calculatrice.
c) Quelles sont les valeurs affichées lorsque le seuil est $S=50\,000$? $S=10\,000$? $S=1$?

Exo n°10.

On dispose d'une feuille de papier assez grande, d'épaisseur $0{,}1$ mm, et on la plie plusieurs fois en deux.

Sachant que la distance moyenne Terre-Lune est de $384\,400$ km, combien de fois faut-il plier la feuille pour réaliser cette distance ? (**<u>réponse 42 fois</u>**).

Exo n°11. (Radioactivité)

Les éléments radioactifs sont instables et ont tendance à se désintégrer. On considère une masse de noyaux radioactifs, par exemple de plutonium, provenant des déchets d'une centrale nucléaire.
La période T est le temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présents ont été désintégrés.
Soit N_0 le nombre de noyaux à l'instant $t=0$.
On a :

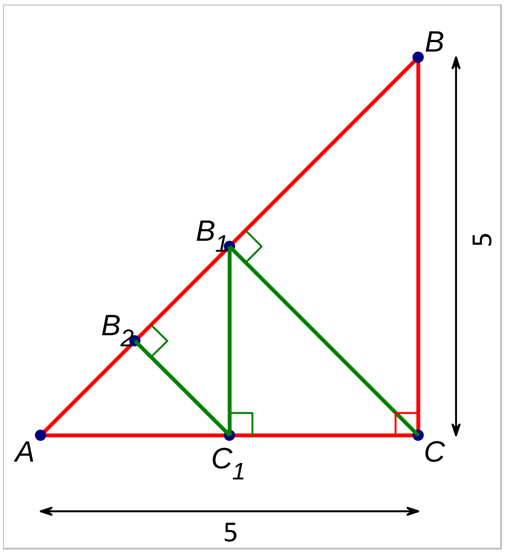
t	0	T	$2T$	…
Nombre de noyaux radioactifs restant à l'instant t	N_0	$\dfrac{N_0}{2}$	$\dfrac{N_0}{4}$	…
Nombre total de noyaux désintégrés à l'instant t	0	$\dfrac{N_0}{2}$	$\dfrac{N_0}{2}+\dfrac{N_0}{4}$	…

1. Vérifier que les nombres de noyaux radioactifs restant aux instants $t=0$, $t=T$, $t=2T$, … , $t=nT$, forment une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer, en fonction de N_0, le nombre total de noyaux désintégrés à l'instant $t=10T$.

Exo n°12.

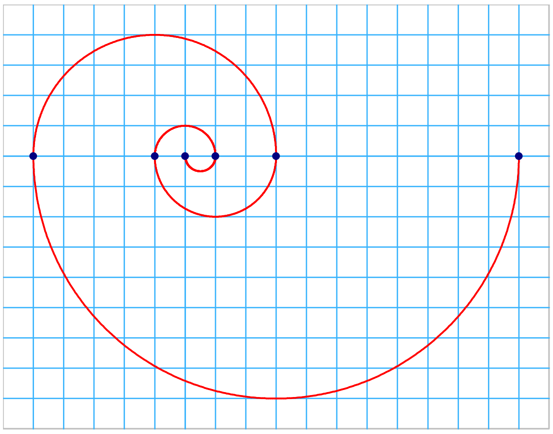
On considère le triangle isocèle ABC. Donner la longueur l_1 de l'hypoténuse (on donnera la valeur exacte).

1. On considère les triangles rectangles AB_1C, AB_1C_1, AB_2C_1. On note $l_2=AC$, $l_3=AB_1$ et $l_4=AC_1$. Donner la valeur exacte de l_3 et l_4.
2. Préciser la nature et la raison de la suite formée par les nombres l_1, l_2, l_3 et l_4.
3. On considère la suite géométrique de premier terme $5\sqrt{2}$ et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Calculer la valeur du terme de rang 8.



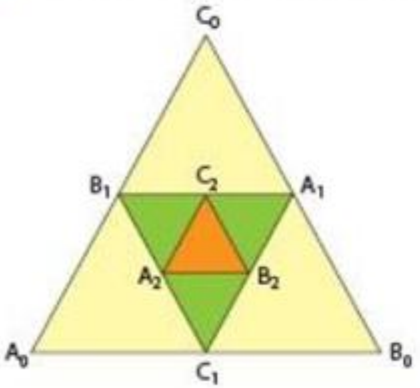
Exo n°13.

Sur la figure, chacun des demi-cercles a pour diamètre un rayon du demi-cercle précédent.
Calculer la longueur de cette spirale lorsqu'elle est composée de 6 demi-cercles dont le plus grand a pour rayon 8 cm.



Exo n°14.

++++ Approche de la limite d'une suite



On considère le triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ dont les côtés ont pour longueur $l_0 = 10$ cm.
En joignant les milieux des côtés on obtient un deuxième triangle équilatéral $A_1B_1C_1$ dont les côtés ont pour longueur l_1.
On poursuit le processus et on désigne par l_n la longueur des côtés du $(n + 1)$-ième triangle équilatéral ainsi construit.

1. Pourquoi a-t-on $l_1 = \frac{1}{2}l_0$?

2. a) Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n.
b) Quelle est la nature de la suite (l_n) ?

3. Donner l'expression de l_n en fonction de n.

4. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle le $(n+1)$-ième triangle aura des côtés de longueur inférieure à 1 mm.

On peut déterminer n pour que l_n soit aussi proche de 0 que l'on veut. *On dit alors que la suite l_n a pour limite 0 quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.* (On dit aussi : *lorsque n tend vers $+\infty$.*)

Exo n°15.

++++ Suite de Robinson

Cette suite, qui ressemble à la suite de Conway, est définie de la façon suivante :
– le premier terme est un nombre entier positif donné.
– chaque terme est obtenu en indiquant combien de fois chaque chiffre (de 9 à 0 **dans cet ordre**) apparaît dans le terme précédent.

1. On prend $u_0 = 0$

Dans u_0 il apparaît une fois 0, donc $u_1 = 10$.
Dans u_1 il apparaît une fois 1 et une fois 0, donc u_2 : 1110
Dans u_2 il apparaît trois 1 et une fois 0, donc $u_3 = 3110$
Dans u_3 il apparaît une fois 3, deux fois 1 et une fois 0, donc $u_4 = 132110$.
Dans u_4 il apparaît une fois 3, une fois 2, trois fois 1 et une fois 0, donc $u_5 = 13123110$. (Attention : il faut commencer par compter les 3, puis les autres chiffres par ordre décroissant : 2 puis 1, puis 0).

Calculer les termes suivants et indiquer ce que l'on constate à partir de u_{10}.

2. On prend $u_0 = 40$.

Calculer les termes suivants et indiquer ce que l'on constate à partir de u_{10}.