Chapitre 7 : **Nombre dérivé**

SOMMAIRE

1. QUIZ

	A	B	C	D
13 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ vaut :	-2	$\frac{-2h-2}{h}$	$\frac{-2h}{h}$	$-2h - 1$
14 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ vaut :	2	$2 + h$	$\frac{2h+h^2}{h}$	$2 + h^2$
15 La limite, lorsque h tend vers 0, de $t(h) = \frac{h^2 - 3h}{h}$ vaut :	-2	-3	0	Elle n'existe pas.
16 La tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse -2 a pour pente :	4	$f'(-2)$ où f est la fonction carré.	-2	-4
17 Une équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ est :	$y = -a^2 + 2ax$	$y = a^2 + 2ax$	$y = -a^2 + 2a(x-a)$	$y = 2a + a^2(x-a)$
18 La dérivée d'une fonction affine est toujours :	non monotone.	strictement décroissante.	constante.	strictement croissante.
19 La pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ au point d'abscisse 2 vaut :	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
20 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 25$. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dots$:	$2x - 2$	$2x + 23$	$x - 2$	$2(x-1)$
21 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{6}{x}$. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dots$:	$\frac{6}{x^2}$	$-\frac{6}{x^2}$	$-\frac{3}{x^2}$	6
22 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)\times(2x-3)$. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dots$:	$4x$	$6x^2 - 6x + 2$	$2(3x^2 - 3x + 1)$	$2x(2x-3) + 2(x^2+1)$
23 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \frac{x+2}{3x-6}$. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}, f'(x) = \dots$:	$\frac{3x-6-3(x+2)}{(3x-6)^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-12}{(3x-6)^2}$	$\frac{6x}{(3x-6)^2}$

2. Dérivation en un point

A. Taux d'accroissement

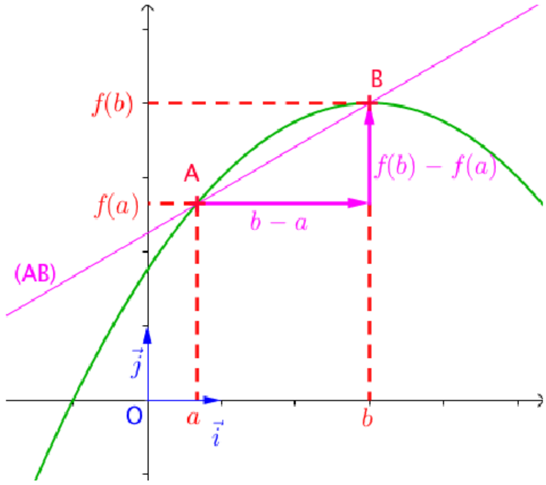
Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a < b$.
Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{f\,(b) - f\,(a)}{b - a}$$



B. Nombre dérivée d'une fonction f en un réel a

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

Soit un réel a appartenant à I.

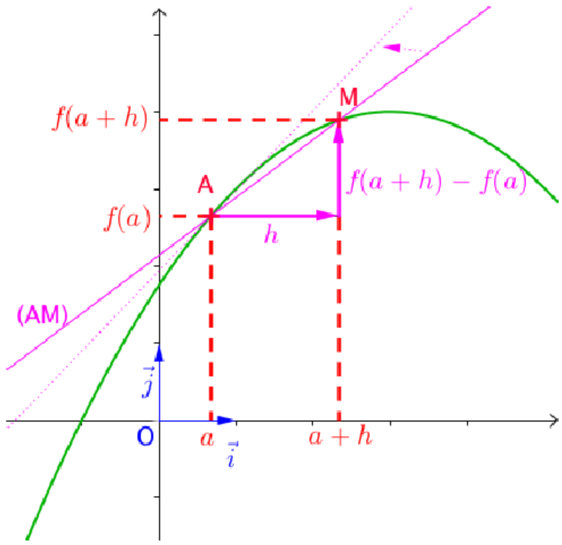
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives :
a et $a + h$, avec $h > 0$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à :.

$$\frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{(a+h) - a} = \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de

$$\frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h}$$ lorsque h tend vers 0.



Définition

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h} = L$$

L est appelé le nombre dérivé de f en a.

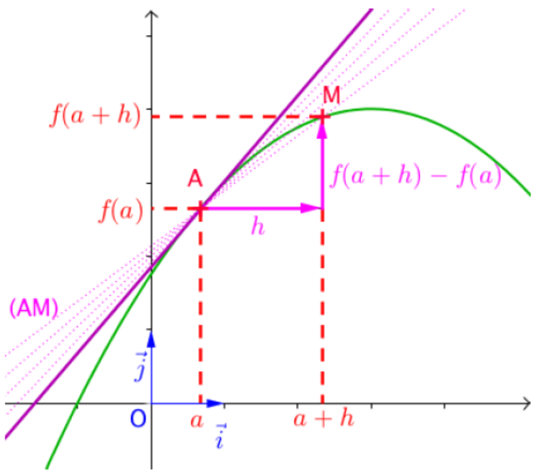
Exercice :
Soit la fonction polynôme de degré 2 f définie sur par $f\,(x) = x^2 + 2x - 3$
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$

C. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.

L est le nombre dérivé de f en a.

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f



Définition

La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L

Propriété (démonstration : ex 107 page 129)

Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = L\,(x - a) + f\,(a)$$

L étant le nombre dérivé de f en a

Démonstration :

Exemple :

On considère la fonction polynôme de degré 2 f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x) = x^2 + 2x - 3$.

Déterminer l'équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2

2. Fonction Dérivée

A. Dérivées des fonctions usuelles

Exemple 1:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x)\; = \;x^2$

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a

Pour

$$h\; \neq \;0 : \frac{f(a+h)\; - \;f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - \;a^2}{h} = \frac{a^2 + \;2\,a\,h + h^2 - \;a^2}{h} = \frac{2\,a\,h + h^2}{h} = 2\,a + h$$

Or

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)\; - \;f(a)}{h}\; = \;\lim_{h \to 0}(2\,a + h)\; = 2\,a$$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$.

On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = \;2x$

Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I

Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'

Exemple 2:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x)\; = \;x^3$
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a

Exemple 3:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f\,(x) \;=\; \frac{1}{x}$
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a $(\neq 0)$

Exemple 4:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f\,(x) \;=\; \sqrt{x}$
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque $a \;\in\; \mathbb{R}^+/\{0\}$

B. Formules de dérivation des fonctions usuelles

fonction f	ensemble de définition de f	dérivée f'	ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a\,x, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2\,x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1 \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1 \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$

C. Opérations sur les fonctions dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
$k\,u$ est dérivable sur I, où k est une constante	$(k\,u)' = k\,u'$
$u\,v$ est dérivable sur I	$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

D. Calcul de la dérivée des fonctions cosinus et sinus

fonction f	**ensemble de définition de f**	**dérivée f'**	**ensemble de définition de f'**
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(\omega\,x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\omega\,\sin(\omega\,x + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(\omega\,x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \omega\,\cos(\omega\,x + \varphi)$	$\mathbb{R}$

Propriété (démonstration : ex 109 page 129)

Dérivée d'une somme

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction somme $x \to u(x) + v(x)$, notée $u + v$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$

Exemple:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 7$. f est la somme de trois fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ ☐☐, par :

$f'(x) =$

Propriété (démonstration : ex 110 page 129)

Dérivée d'un produit par un nombre réel

Si k est un nombre réel et u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \to k \times u(x)$, notée $k \times u$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -3\sqrt{x}$.
Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f(x) = -3 \times u(x)$ où $u(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sa fonction dérivée est définie, pour tout $x \in$ ☐$]0\,;\,+\infty[$, par :

$f'(x) =$

Propriété (démonstration redigée : page 128)

Dérivée d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction produit $x \to u(x) \times v(x)$, notée $u \times v$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

Conséquence :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \to (u(x))^2$, notée u^2, est dérivable sur I et $(u^2)' = 2\,u\,u'$

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. f est le produit des fonctions $u : x \to x$ et $v : x \to (u(x))^2$, donc elle est dérivable sur]0 ; +∞[.
$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

Propriété (démonstration : ex 111 page 129)

Dérivée d'un quotient

- Si u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction quotient $x \to \frac{u(x)}{v(x)}$ notée $\frac{u}{v}$, est dérivable sur I et pour tout nombre réel x de I
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$
- Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $x \to \frac{1}{v(x)}$ notée $\frac{1}{v}$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I,
$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

Exemple :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $h(x) = \frac{2x-4}{x+2}$ est le quotient des fonctions $u : x \to 2x-4$ et $v : x \to x+2$, dérivables sur $\mathbb{R}$.La fonction v s'annule en $x = -2$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$,

$$h'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

Propriété (admise)

Dérivée de $x \to g(ax+b)$

Si g est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si a et b sont deux nombres réels tels que pour tout x dans l'intervalle I, $ax + b$ appartient à J, alors la fonction $f : x \to g(ax+b)$ est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-4}$. f s'écrit $x \to g(2x-4)$ où g est la fonction racine carrée qui est dérivable sur $J =]0\,;+\infty[$.
Or, $2x - 4 \in J \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in]2\,;+\infty[$.
Donc f est dérivable sur $I =]2\,;+\infty[$ et, $\forall x \in I$,
$f'(x) = 2 \times g'(2x-4)$

Exercices 45 et 46 page 122:

Pour les exercices **45** et **46**
Dans chaque cas, déterminer si la fonction est dérivable en a et, s'il existe, donner la valeur du nombre dérivé en a.

45 **a.** $f : x \mapsto -3x+1$ en $a = 1$.
b. $g : x \mapsto 3x^2 - 4$ en $a = 2$.
c. $h : x \mapsto x^2 + 7x - 3$ en $a = 3$.
d. $k : x \mapsto \sqrt{x-2}$ en $a = 2$.

46 **a.** $f : x \mapsto -2x^2 + 3x - 1$ en $a = 0$.
b. $g : x \mapsto 2x^2 - 5$ en $a = 0$.
c. $h : x \mapsto (x-3)^2$ en $a = 3$.
d. $k : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ en $a = 0$.

Exercices 47 et 48 page 122 et 53 page 123:

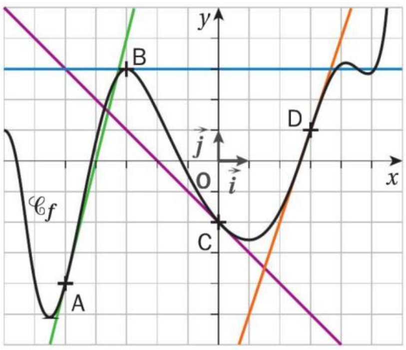
Pour les exercices **47** et **48**
Justifier que la fonction f est dérivable en a et déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

47 **a.** $f : x \mapsto x^2 - 4$ en $a = 2$.
b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ en $a = 1$.

48 **a.** $f : x \mapsto x^2 - 2x + 6$ en $a = -1$.
b. $f : x \mapsto x^3$ en $a = 1$.

Aide $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

53 On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A, B, C et D.



a. Déterminer graphiquement $f'(-5)$, $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.
b. Déterminer une équation de chacune des tangentes tracées.

3. Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème (admis)

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I
- Si $f\,'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I
- Si $f\,'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I
- Si $f\,'(x) = 0$, alors f est constante sur I

- **Dresser le tableau de variations d'une fonction**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par . $f\,(x) = x^3 + \frac{9}{2}\,x^2 - 12x + 5$

1. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation
2. Dans repère, représenter graphiquement la fonction f.

1.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3\,x^2 + 9\,x - 12$.

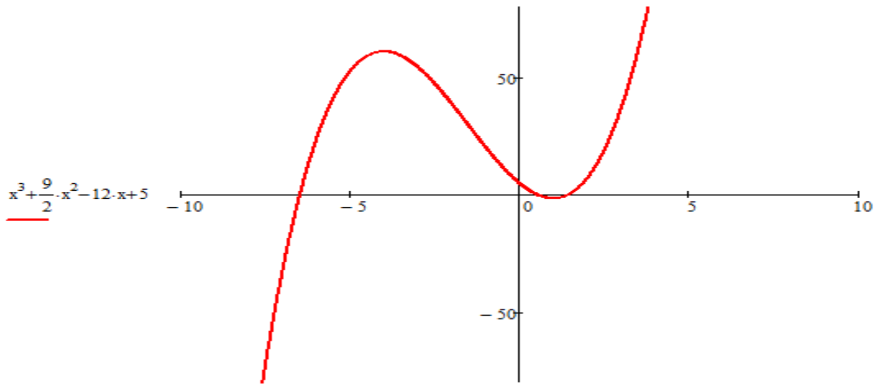
Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

Le discriminant du trinôme (polynôme de degré 2) $3\,x^2 + 9x - 12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-9+\sqrt{225}}{2 \times 3}$ = 1 et $x_2 = \frac{-9-\sqrt{225}}{2 \times 3}$ = -4

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f\,(x)$	$-\infty$	↗	61	↘	$\frac{-3}{2}$	↗	$+\infty$



4. Extremum d'une fonction

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée $f\,'$ de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum en $x = c$

- **Rechercher d'un extremum**

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$, admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 10x - 3$
Et : $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{10} = 0.3$

.

On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$3/10$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{71}{20}$	↗	$+\infty$

En effet : $f(3/10) = 71/20$
La fonction f admet donc un minimum égal à $71/20$ en $x = \frac{3}{10}$