SOMMAIRE

5. Exercices supplémentaires (Développement et factorisation) *6*

Activité mentale (flash)

Avec des transformations

Donner dans chaque cas la bonne réponse

1. $(5\,x)^2$ est égal à
   a) $5\,x^2$ b) $10\,x^2$
   c) $25\,x^2$ d) $25 + 10\,x + x^2$

2. $(x-2)^2$ est égal à
   a) $x^2 + 4$ b) $x^2 - 4$
   c) $x^2 - 4\,x + 4$ d) $x^2 - 4\,x - 4$

3. $\frac{2\,x+3}{x}$ est égal à
   a) 5 b) $2 + \frac{3}{x}$
   c) $\frac{2+3}{1}$ d) autre

4. La forme factorisé de $4\,x^2 - 12\,x + 9$ est
   a) $(2\,x+3)^2$ b) $(2\,x-3)\,(2\,x+3)$
   c) $(2\,x-3)^2$ d) $4\,x\,(x-3) + 9$

Avec des équations

Donner dans chaque la (ou les) bonne(s) réponse(s)

1. -2 est solution de l'équation :
   a) $2\,x = 0$
   b) $-2\,x^2 - 2\,x = 0$
   c) $\frac{4}{x} + 1 = -1$

2. L'équation $4\,x - 3 = 7\,x + 6$ a pour solution
   a) 3 b) $\frac{9}{11}$
   c) -3 d) 12

3. L'équation $(2\,x+1) - (x-3) = 0$ a pour solution(s)
   a) 0.5 et 3 b) 2
   c) -4 d) -0.5 et 3

1. Calculs algébriques sur les quotients

Les propriétés

Pour tous réels a, b et k avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b} \quad et \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Pour tous réels a, b, c et d avec $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \qquad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d} \qquad \frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

Pour additionner ou soustraire deux quotients, on les réduit préalablement au même dénominateur .

Pour tous réels a, b, c et d avec b, c et d non nuls, on a :

$$l'inverse\ de\ \frac{b}{d}\ est\ \frac{d}{b} \qquad \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$$

2. Développer, factoriser

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme

Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit

Les propriétés

Pour tous réels k, a, b, c, d :

Distributivité

développer

$$\boldsymbol{k \times (a+b) = k \times a + k \times b}$$

factoriser

Double distributivité

développer

$$\boldsymbol{(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d}$$

factoriser

Identités remarquables

développer

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2}$$

factoriser

3. Egalité « pour tout x » et équation

Egalité « pour tout x »

Quelle que soit la valeur par laquelle on remplace x dans les expressions

$(x-3)(x+1)-5$, $x^2 - 2x - 8$, $(x-4)(x+2)$ on obtient le même résultat

On écrit : **pour tout réel x**, $(x-3)(x+1)-5 = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

Si f la fonction définie sur R par $f(x) = (x-3)(x+1)-5$
On a aussi $f(x) = x^2 - 2x - 8$, et $f(x) = (x-4)(x+2)$ **pour tout réel x**

Pour calculer des images ou antécédents par f, pour étudier des propriétés de f, on peut utiliser l'une ou l'autre de ces expressions, la mieux adaptée.

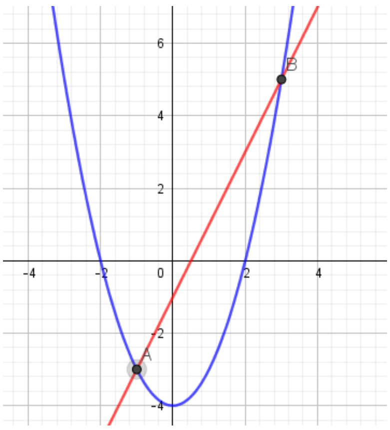
Equation

Quand x prend la valeur 3, on a bien l'égalité $2x - 1 = x^2 - 4$

on dit que 3 est la **solution de l'équation** $2x - 1 = x^2 - 4$

Résoudre une équation c'est chercher **toutes** les solutions de cette équation

Résolution graphique



Résolution algébrique

$$2x - 1 = x^2 - 4$$

Est équivalent à $x^2 - 2x - 3 = 0$

On démontre que $x^2 - 2x - 3$ se factorise ainsi :

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

Donc résoudre $x^2 - 2x - 3 = 0$ équivaut à résoudre

$$(x-3)(x+1) = 0$$

Donc

$x - 3 = 0$
$\Rightarrow x = 3$

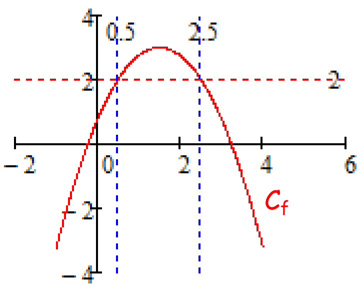
Ou $x + 1 = 0$
$\Rightarrow x = -1$

Résoudre graphiquement une équation

Soit k un nombre réel et f et g deux fonctions.

Equation $f(x) = k$

Exemple $f(x) = 2$



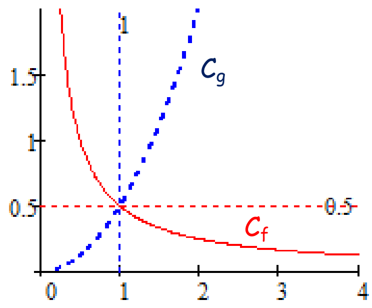
Les solutions sont 0.5 et 2.5

Méthode générale

- On place k sur l'axe (oy)
- On repère tous les points de la courbe d'ordonnées k
- On lit les abscisses : ce sont les solutions

Equation $f(x) = g(x)$

Exemple



La solution est 1

Méthode générale

- On repère les points communs aux deux courbes
- On lit les abscisses de ces points : ce sont les solutions

Résoudre algébriquement une équation

Deux équations sont dites équivalentes quand elles ont les mêmes solutions.

Propriété

Pour transformer une équation à une équation équivalente, on peut utiliser les transformations suivantes :

- **T_1** développer, factoriser, réduire certains termes
- **T_2** Ajouter ou soustraire un même terme à chaque membre de l'équation
- **T_3** Multiplier ou diviser chaque membre par un nombre **non nul**

Equations du premier degré

Ce sont celles qui s'écrivent sous la forme $a\,x + b = c\,x + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). La solution s'écrit sous la forme

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Autres équations

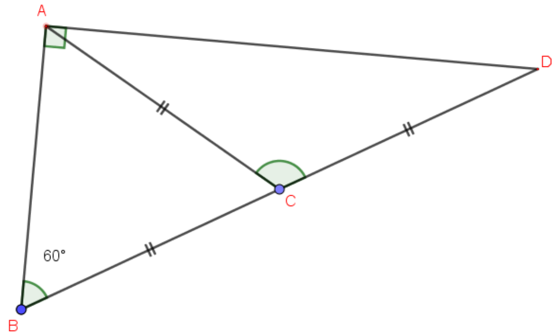
Il faut les ramener après développement, factorisation et réduction soit à une équation (équivalente) du premier degré ou à produit/quotient (équivalent) des équations du premier degré puis appliquer les propriétés suivantes

Propriétés

- Un produit est nul **si et seulement si** l'un de ces facteurs est nul :
  $A \times B = 0$ **si et seulement si** $A = 0$ **OU** $B = 0$
- Un quotient est nul **si et seulement si** son numérateur et nul et son dénominateur non nul :
  $A/B = 0$ **si et seulement si** $A = 0$ **ET** $B \neq 0$

4. Exercices

- Calculer **a)** $2 \times \frac{3}{5} - \frac{3}{10}$ **b)** $4 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{6}$
- Calculer **a)** 10% de 720 **b)** 30% de 200
- Calculer **a)** 90% de 800 **b)** 99% de 200
- Evaluer $24{,}6\%$ de 200 € et de 120 €
- Calculer les coordonnées du milieu $[AB]$ avec $A(-2\,;1)$ et $B(6\,;-\frac{1}{2})$
- ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 4$ et $BC = 6$, calculer AC
- Réduire $\sqrt{45} - \sqrt{5}$
- Le point $A(2\,;3)$ appartient-il à la droite d'équation $y = -x + 5$
- Calculer l'angle ACD de la figure ci-contre



- Développer **a)** $(2x-1)^2$ **b)** $(4x-1)\ (4x+1)$
- Développer **a)** $x\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$ **b)** $(3x-7)^2$
- Quel est le terme en x^2 obtenu en développant et réduisant $(x+1)^2 + 4(x-1)^2$
- Quel est le terme en x obtenu en développant et réduisant $(3x+4)\ (x-2)$
- Développer et réduire $(2x+1)\ (x+1)$
- On sait que $2a - b = 3$ et $2a + b = 5$. Calculer $4a^2 - b^2$
- Factoriser **a)** $9x^2 + 6x + 1$ **b)** $4x^2 - 64$
- Factoriser $(x+1)^2 + 4(x+1)$
- Résoudre l'équation $3x + 1 = x - 5$
- Résoudre l'équation $x^2 + 5x = 0$

- Soit $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$
  a) Calculer les images de -1, 0, 1 par f et g
  b) A-t-on $f(x) = g(x)$ pour tout x réel ?

- Vrai ou faux ?
  a) $\sqrt{x^2+1} = x + 1$ pour tout x réel
  b) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ pour tout x réel

- Parmi les nombres -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; $\sqrt{2}$; quels sont ceux qui sont solutions de l'équation ?
  a) $x + 3 = 5x^2 - 1$
  b) $3x^4 - x = 0$
  c) $\frac{x+2}{x-1} = 0$
  d) $x^3 = 2x$

5. Exercices supplémentaires (Développement et factorisation)

Factorisation avec une identité remarquable

a) $x^2 + 2x + 1$
b) $x^2 - 20x + 100$
c) $9x^2 + 12x + 4$
d) $(2x - 5)^2 - x^2$
e) $(3x - 4)^2 - (x - 1)^2$
f) $25 - (3x - 2)^2$
g) $b^2 - 3b + \frac{9}{4}$
h) $16(3x + 1)^2 - 25(x - 1)^2$
i) $81 - 16(x - 2)^2$

Développement

a) $(2x - 5)^2 - (x + 3)(x - 1)$
b) $(3x + 1)(x - 1) - (3x + 2)(x + 2)$
d) $(x - 1)(x + 3) + (2x + 7)(3x - 1)$
e) $(x - 2)(3x - 4) - (x + 2)^2$
g) $-(x + 3)(x - 5) + (4x + 3)(2x - 3)$
h) $-(x - 2)(3x - 4) - (5x + 3)(x + 2)$

Factorisation par étapes (avec/sans l'utilisation des identités remarquables)

A(x) = $x^2 - 4 + (x - 2)(x + 1)$
B(x) = $3x^2 - 12x + 12$
C(x) = $x^2 + 3x + (x + 3)^2$
D(x) = $(x + 1)(x + 2) - (3x + 6)$
E(x) = $2x(x + 3) + 4x + 12$
F(x) = $(x - 3)(3x - 4) - 3x + 4$
G(x) = $xy - xz - y(y - z)$
H(x) = $-x^2 + 8x - 16$
I(x) = $7x^3 - 28x$
J(x) = $16x^2 - 81$
K(x) = $4a^2 b - b$
L(x) = $4x^2 - 4x + 1$
M(x) = $2(x - 1)^2 + 3x - 3$
N(x) = $2x^2 + 8x + 8$
O(x) = $x^2 - 16 + (x - 4)^2$
P(x) = $5x^2 - 125$
Q(x) = $4x^2 - 12x + 9$
R(x) = $(2x - 3)^2 - (5x + 3)^2$
S(x) = $(x - 5)^2 - 2(x - 3)(x - 5)$
T(x) = $x^2 + 26x + 169$
U(x) = $(9x^2 - 25) + (6x + 10)$

5. Exercices supplémentaires (Développement et factorisation)

Factorisation avec une identité remarquable

a) $x^2 + 2x + 1$
b) $x^2 - 20x + 100$
c) $9x^2 + 12x + 4$
d) $(2x - 5)^2 - x^2$
e) $(3x - 4)^2 - (x - 1)^2$
f) $25 - (3x - 2)^2$
g) $b^2 - 3b + \frac{9}{4}$
h) $16(3x + 1)^2 - 25(x - 1)^2$
i) $81 - 16(x - 2)^2$

Développement

a) $(2x - 5)^2 - (x + 3)(x - 1)$
b) $(3x + 1)(x - 1) - (3x + 2)(x + 2)$
d) $(x - 1)(x + 3) + (2x + 7)(3x - 1)$
e) $(x - 2)(3x - 4) - (x + 2)^2$
g) $-(x + 3)(x - 5) + (4x + 3)(2x - 3)$
h) $-(x - 2)(3x - 4) - (5x + 3)(x + 2)$

Factorisation par étapes (avec/sans l'utilisation des identités remarquables)

A(x) = $x^2 - 4 + (x - 2)(x + 1)$
B(x) = $3x^2 - 12x + 12$
C(x) = $x^2 + 3x + (x + 3)^2$
D(x) = $(x + 1)(x + 2) - (3x + 6)$
E(x) = $2x(x + 3) + 4x + 12$
F(x) = $(x - 3)(3x - 4) - 3x + 4$
G(x) = $xy - xz - y(y - z)$
H(x) = $-x^2 + 8x - 16$
I(x) = $7x^3 - 28x$
J(x) = $16x^2 - 81$
K(x) = $4a^2 b - b$
L(x) = $4x^2 - 4x + 1$
M(x) = $2(x - 1)^2 + 3x - 3$
N(x) = $2x^2 + 8x + 8$
O(x) = $x^2 - 16 + (x - 4)^2$
P(x) = $5x^2 - 125$
Q(x) = $4x^2 - 12x + 9$
R(x) = $(2x - 3)^2 - (5x + 3)^2$
S(x) = $(x - 5)^2 - 2(x - 3)(x - 5)$
T(x) = $x^2 + 26x + 169$
U(x) = $(9x^2 - 25) + (6x + 10)$